

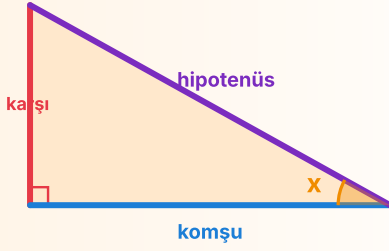
TYT – AYT GEOMETRİ · DERGİ 2

Trigonometri, İkizkenar – Eşkenar, Açıortay, Kenarortay ve Merkezler

Dergideki konu formülleri sırasıyla ve renkli şekillerle bir arada.
Ardından orta ve üst seviye öğrenciler için seçilmiş 10 soru, cevap
anahtarı ve çözümler.

- 1 Dik Üçgen ve Trigonometri (5 kart)
- 2 İkizkenar – Eşkenar Üçgen (7 kart)
- 3 Açıortay (4 kart)
- 4 Kenarortay (4 kart)
- 5 Merkezler (4 kart)
- 6 Seçme 10 Soru ve Çözümler

1 Trigonometrik Oranlar

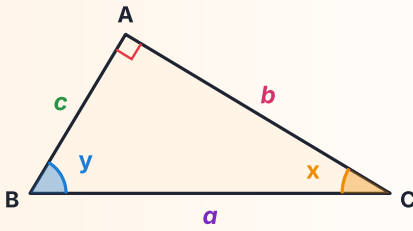


$$\sin x = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \quad \cos x = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}}$$

$$\tan x = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \quad \cot x = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$

Açı dik üçgende değilse, uygun bir dikme indirerek dik üçgen oluştur.

2 Tümler Açılar

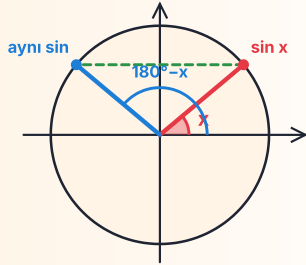


$x + y = 90^\circ$ ise:

$$\sin x = \cos y = \frac{c}{a} \quad \cos x = \sin y = \frac{b}{a}$$

$$\tan x = \cot y = \frac{c}{b} \quad \cot x = \tan y = \frac{b}{c}$$

3 Temel Özdeşlikler

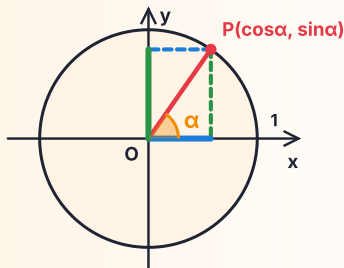


$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$90^\circ - x$: $\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cot$ · $180^\circ - x$: $\sin$ aynı, $\cos/\tan/\cot$ işaret değiştirir

4 Birim Çember



Merkezi orijinde, yarıçapı 1 olan çember. Açının bitim kenarının çemberi kestiği nokta:

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

x eksenini kosinüs, y eksenini sinüs eksenidir. II. bölgede ($90^\circ - 180^\circ$) $\cos$ negatif, $\sin$ pozitif.

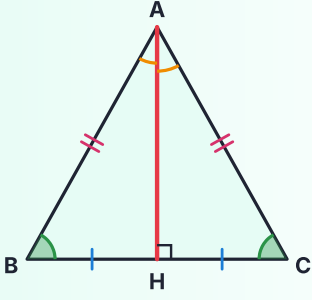
5 Özel Açıların Oranları

	sin	cos	tan	cot
0°	0	1	0	—
30°	½	√3/2	√3/3	√3
45°	√2/2	√2/2	1	1
60°	√3/2	½	√3	√3/3
90°	1	0	—	0
120°	√3/2	-½	-√3	-√3/3
135°	√2/2	-√2/2	-1	-1
150°	½	-√3/2	-√3/3	-√3
180°	0	-1	0	—

Bu tablo özel dik üçgenlerden (30–60–90, 45–45–90) ve birim çemberden çıkar; ezberlemek yerine üçgeni çizerek bulabilirsin.

sin 180°–x = sin x olduğu için 120° ↔ 60°, 135° ↔ 45°, 150° ↔ 30° aynı sinüse sahiptir.

1 İkizkenar Üçgen

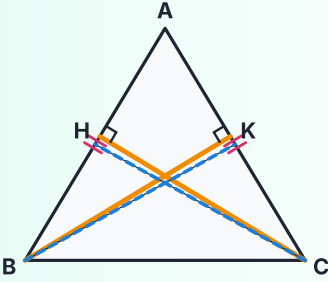


AH:
yükseklik
açıortay
kenarortay

$$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C})$$

Simetri eksen: Tepeden çizilen **yükseklik = açıortay = kenarortay**. Bu üçünden ikisi çakışıyorsa üçgen ikizkenardır.

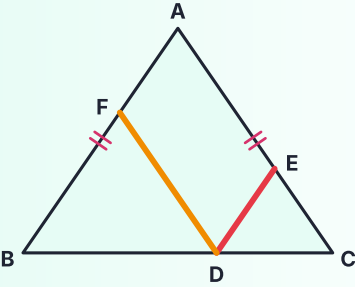
2 Eşit Kenarların Yardımcı Elemanları



Eşit kenarlara ait **yükseklikler**, **kenarortaylar** ve **açıortaylar** eşittir.

$$|AB| = |AC| \Rightarrow |BK| = |CH|$$

3 Tabandan Çizilen Paraleller

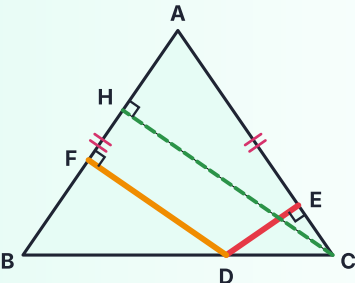


Tabandaki bir noktadan eşit kenarlara çizilen paralellerin toplamı bir eşit kenara eşittir.

$$|DE| + |DF| = |AB| = |AC|$$

Oluşan küçük üçgenler de ikizkenardır.

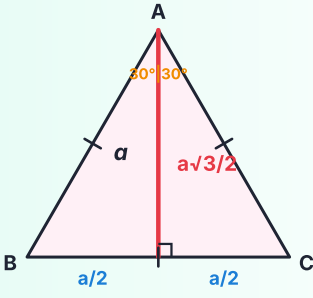
4 Tabandan Çizilen Dikmeler



Tabandaki bir noktadan eşit kenarlara çizilen dikmelerin toplamı, eşit kenara ait yüksekliğe eşittir.

$$|DE| + |DF| = |CH|$$

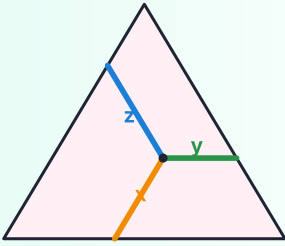
5 Eşkenar Üçgen



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tüm açılar 60°. Her köşeden çizilen yükseklik hem açıortay hem kenarortaydır; 30–60–90 üçgenleri oluşur.

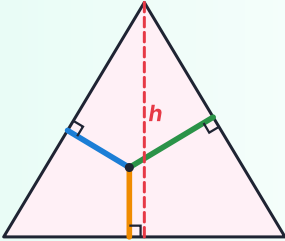
6 Eşkenar İçinde Paraleller



İç bir noktadan kenarlara çizilen paralellerin toplamı bir kenara eşittir.

$$x + y + z = a$$

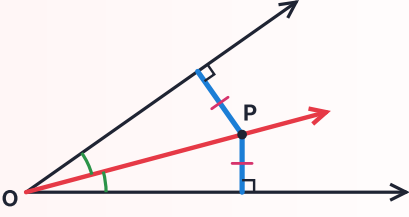
7 Eşkenar İçinde Dikmeler



İç bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin toplamı yüksekliğe eşittir (nokta nerede olursa olsun).

$$|KD| + |KE| + |KF| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

1 Açıortay ve Dikmeler

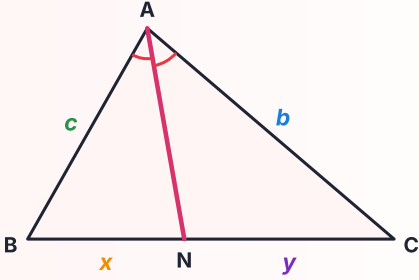


Açıortay üzerindeki her nokta açının kollarına **eşit uzaklıktadır**.

$$P \text{ açıortayda} \Rightarrow |PE| = |PF|$$

Açıortay, bulunduğu açının simetri eksenidir: kolları üzerinde eşit uzaklıktaki noktalar birbirinin simetriğidir (katlama soruları).

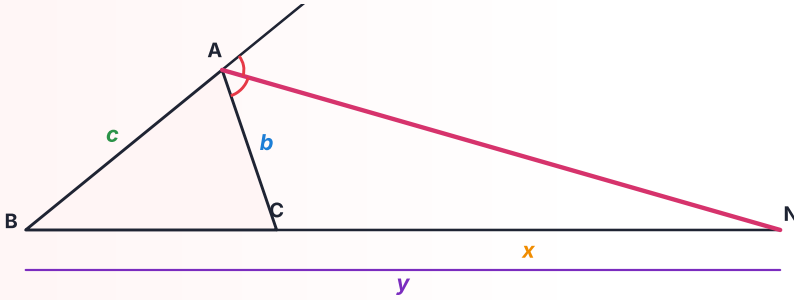
2 İç Açıortay Teoremi



İç açıortay karşı kenarı, diğer iki kenarla orantılı parçalara ayırır.

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$$

3 Dış Açıortay Teoremi

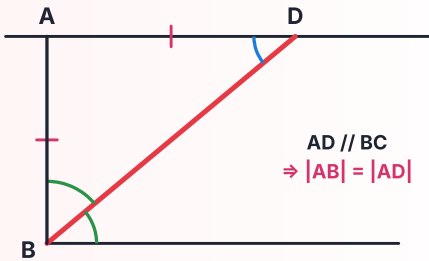


Dış açıortay karşı kenarın uzantısını kenarlarla orantılı böler.

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

İç ve dış açıortay birbirine diktir.

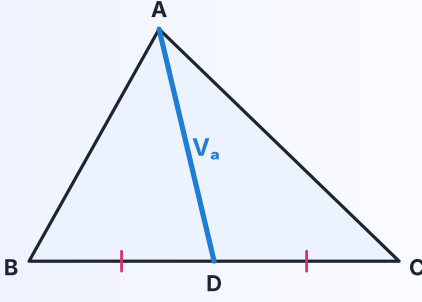
4 Açıortay ve Gizli İkizkenar



Açıortay bir paralelle kesişirse eşit açılar **ikizkenar üçgen** oluşturur.

Açıortaya dik çizilen doğru da ikizkenar üçgen verir (açıortay = yükseklik).

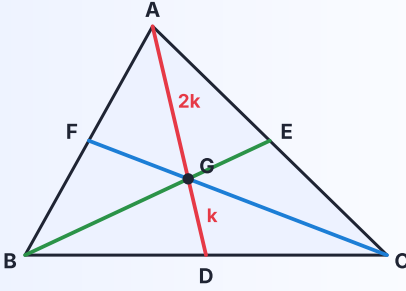
1 Kenarortay



Bir köşeden karşı kenarın **orta noktasına** çizilen doğru parçasıdır.

$$|BD| = |DC| \Rightarrow |AD| = V_a$$

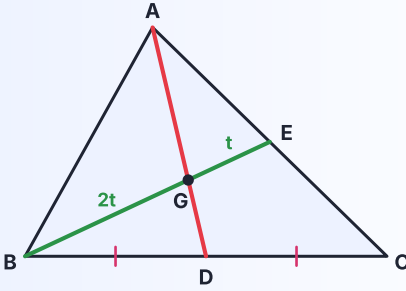
2 Ağırlık Merkezi (G)



Üç kenarortay tek noktada kesişir: **ağırlık merkezi G**. G her kenarortayı köşeden itibaren **2 : 1** oranında böler.

$$|AG| = 2 \cdot |GD| \Rightarrow |AG| = \frac{2}{3} \cdot V_a$$

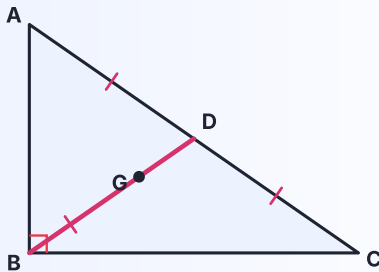
3 Gizli Ağırlık Merkezi



İki kenarortay kesişiyorsa ya da bir kenarortayı 2 : 1 oranında bölen nokta varsa o nokta ağırlık merkezidir.

G, ABC'nin orta noktalarıyla oluşan DEF üçgeninin de ağırlık merkezidir.

4 Dik Üçgende Kenarortay

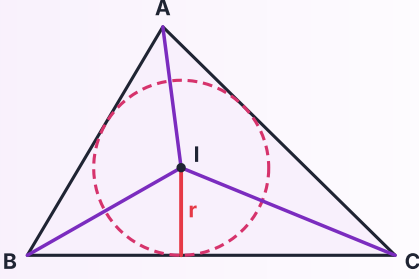


$$m(\hat{B}) = 90^\circ \Rightarrow |BD| = |AD| = |DC| = \frac{|AC|}{2}$$

$$\text{Dik köşeden çizilen kenarortay: } |BG| = \frac{|AC|}{3}$$

$[BG] \perp [CG]$ ise $|AG| = |BC|$ olur.

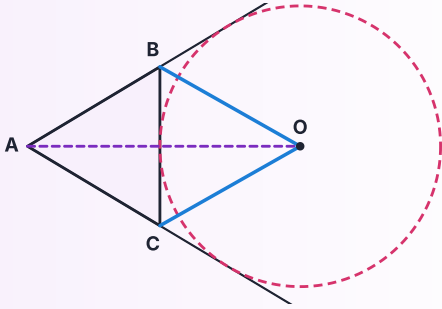
1 İç Teğet Çemberin Merkezi



İç açıortaylar tek noktada kesişir: **iç teğet çemberin merkezi I**. I kenarlara eşit uzaklıktadır (r).

İki iç açıortayın kesiştiği noktadan üçüncü açıortay da geçer.

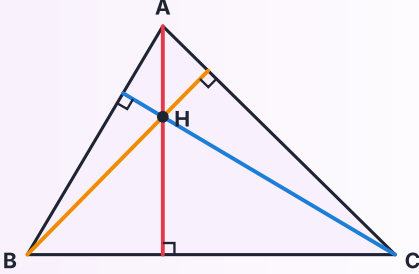
2 Dış Teğet Çemberin Merkezi



İki dış açıortay ile üçüncü köşenin iç açıortayı tek noktada kesişir: **dış teğet çemberin merkezi**.

Her üçgenin 1 iç teğet, 3 dış teğet çemberi vardır.

3 Diklik Merkezi (H)

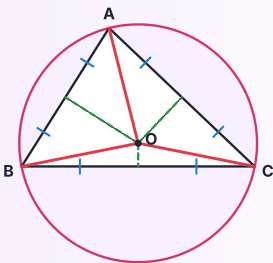


Yüksekliklerin kesim noktasıdır.

Dar açılı: içerde · Dik üçgen: dik köşede · Geniş açılı: dışarıda

İki yüksekliğin kesiştiği noktadan üçüncü köşeye çizilen doğru, üçüncü yüksekliktir.

4 Çevrel Çemberin Merkezi (O)



Kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır; köşelere eşit uzaklıktadır.

$$|OA| = |OB| = |OC| = R$$

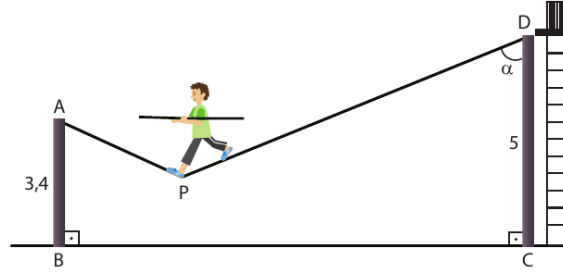
Dar açılı: içerde · Dik üçgen: hipotenüsün ortasında · Geniş açılı: dışarıda

1

Trigonometri

Orta

Güçlendirme Testi 1 (Trigonometri) · S2



[AB] ve [CD] direkleri arasına gerilen ip üzerinde yürüyen bir ip cambazı P noktasına geldiğinde zemine uzaklığı 2,5 metre ve ipin uzunluğu 7,5 metre olmaktadır. $|AB| = 3,4$ metre, $|CD| = 5$ metre ve $m(\widehat{PDC}) = \alpha$ olmak üzere,

$\cos \alpha = \frac{5}{12}$ olduğuna göre, P noktasının [AB] direğine olan uzaklığı kaç metredir?

A) 1,2

B) 1,3

C) 1,4

D) 1,5

E) 1,6

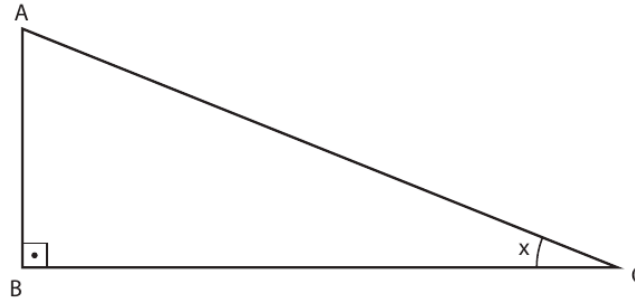
Çözüm alanı

2

Trigonometri

Orta

Güçlendirme Testi 1 (Trigonometri) · S4



ABC dik üçgeninde, $[AB] \perp [BC]$

$m(\widehat{ACB}) = x$ olmak üzere $\tan x = \frac{1}{2}$ ise $\tan 2x$ 'in değeri kaçtır?

A) $\frac{7}{3}$

B) 2

C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{4}{3}$

E) 1

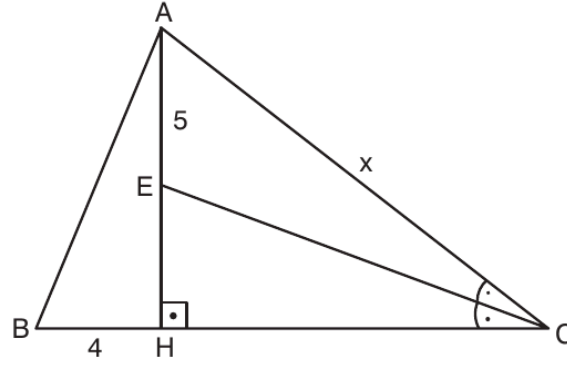
Çözüm alanı

3

İkizkenar-Eşkenar

Orta - Üst

Güçlendirme Testi 1 (İkizkenar-Eşkenar) · S4



Şekildeki ABC üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$

$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB})$, $|AC| = |BC|$, $|AE| = 5$ br

$|BH| = 4$ br olduğuna göre, $|AC| = x$ kaç br'dir?

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

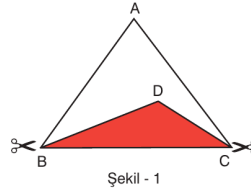
Çözüm alanı

4

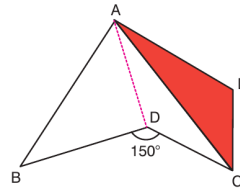
İkizkenar-Eşkenar

Üst

Güçlendirme Testi 1 (İkizkenar-Eşkenar) · S7



Şekil - 1



Şekil - 2

ABC eşkenar üçgeninde, $|BD| = 12$ cm, $|DC| = 5$ cm
olacak şekilde kırmızı boyalı bölge makasla kesilip
Şekil - 2'deki gibi yapıştırılıyor.

$m(\widehat{BDC}) = 150^\circ$ olduğuna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç
cm'dir?

A) 13

B) $10\sqrt{2}$

C) 14

D) $8\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{5}$

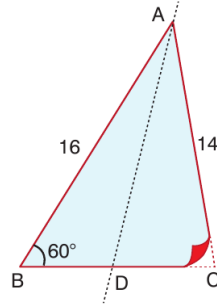
Çözüm alanı

5

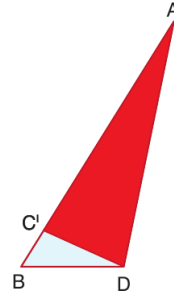
Açıortay

Orta - Üst

Güçlendirme Testi 1 (Açıortay) · S1



Şekil - 1



Şekil - 2

$|AB| = 16$ br, $|AC| = 14$ br ve $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ olan

Şekil - 1'deki ABC üçgeni AD doğrusu boyunca katlanınca
C köşesi [AB] üzerinde C' noktasına geliyor ve Şekil - 2
oluşuyor.

$m(\widehat{ACB}) < 90^\circ$ olduğuna göre, Çevre(DBC') kaç br'dir?

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

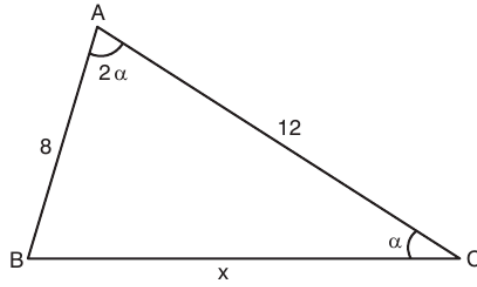
Çözüm alanı

6

Açıortay

Üst

Güçlendirme Testi 1 (Açıortay) · S3



Şekildeki ABC üçgeninde,

$m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{BCA}) = 2\alpha$, $|AB| = 8$ br

$|AC| = 12$ br olduğuna göre, $|BC| = x$ kaç br'dir?

A) $2\sqrt{10}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{10}$

D) 13

E) 14

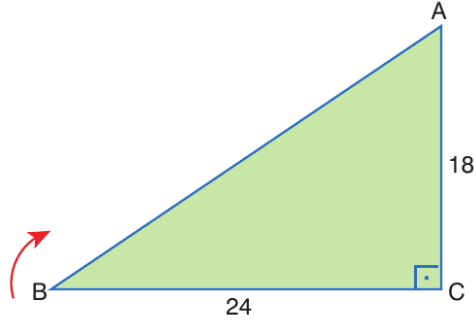
Çözüm alanı

7

Kenarortay

Orta

Güçlendirme Testi 1 (Kenarortay) · S3



Dik kenar uzunlukları 18 birim ve 24 birim olan dik üçgen biçimindeki ABC kağıdı C köşesi etrafında [BC] kenarı ABC üçgeninin ağırlık merkezi olan G noktasından geçene kadar döndürüldüğünde B noktasının yeni konumu B' noktası oluyor.

Buna göre, son durumunda $|B'G|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

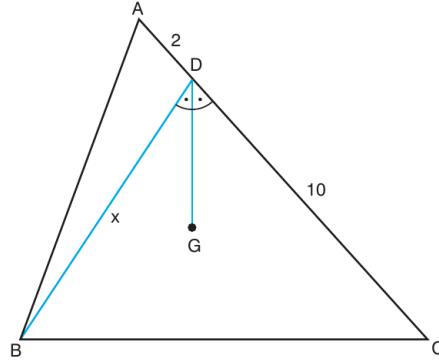
Çözüm alanı

8

Kenarortay

Üst

Güçlendirme Testi 1 (Kenarortay) · S7



ABC bir üçgen, G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi

$$m(\widehat{BDG}) = m(\widehat{GDC})$$

$$|AD| = 2 \text{ cm}$$

$$|CD| = 10 \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, $|BD| = x$ kaç cm'dir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

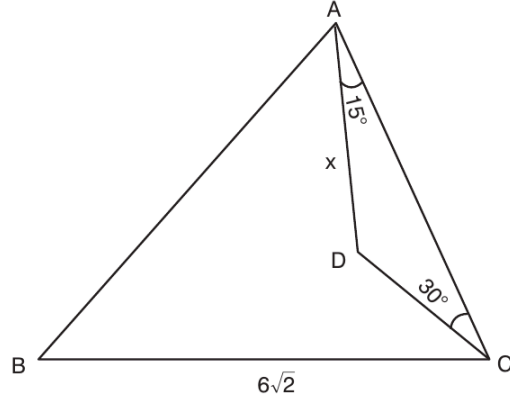
Çözüm alanı

9

Merkezler

Orta - Üst

Güçlendirme Testi 1 (Merkezler) · S3



Şekildeki ABC üçgeninde D noktası diklik merkezi

$m(\widehat{DAC}) = 15^\circ$, $m(\widehat{DCA}) = 30^\circ$ ve $|BC| = 6\sqrt{2}$ br

olduğuna göre, $|AD| = x$ kaç br'dir?

A) 4

B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$

D) 5

E) 6

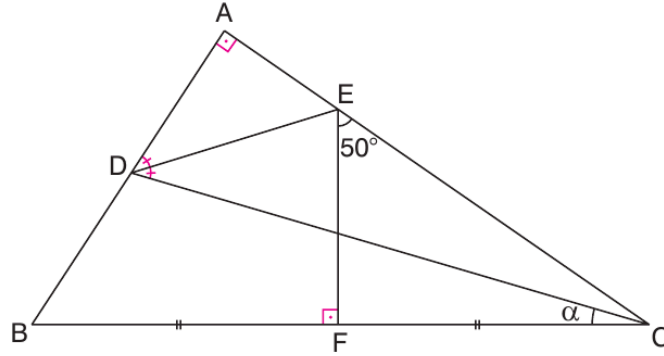
Çözüm alanı

10

Merkezler

Üst

Güçlendirme Testi 1 (Merkezler) · S7



ABC dik üçgen, $[AB] \perp [AC]$, $[EF] \perp [BC]$

$|BF| = |FC|$, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC})$, $m(\widehat{FEC}) = 50^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BCD}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 15

B) 20

C) 25

D) 30

E) 35

Çözüm alanı

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	A	D	C	A	C	C	D

Soru 1 · Trigonometri**A) 1,2**

D ile P arasındaki düşey fark $5 - 2,5 = 2,5$ m. DPC açısı α düşeyle yapıldığından $|DP| \cdot \cos \alpha = 2,5 \Rightarrow |DP| = 2,5 \cdot (12/5) = 6$.

İp 7,5 m $\Rightarrow |AP| = 1,5$. A ile P arasındaki düşey fark $3,4 - 2,5 = 0,9$.

Yatay uzaklık $= \sqrt{1,5^2 - 0,9^2} = \sqrt{1,44} = 1,2$ m

Soru 2 · Trigonometri**D) 4/3**

$\tan x = 1/2$ ise $|AB| = 1$, $|BC| = 2$ alalım. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

Soru 3 · İkizkenar-Eşkenar**C) 10**

$|AC| = |BC| = x \Rightarrow |HC| = x - 4$. CE, AHC üçgeninde C açısının açıortayı:

$$\frac{|AE|}{|EH|} = \frac{x}{x-4} \Rightarrow |EH| = \frac{5(x-4)}{x}, |AH| = \frac{10(x-2)}{x}$$

AHC ve AHB'den $|AH|^2 = x^2 - (x-4)^2 = 8x - 16 = 8(x-2)$.

$100(x-2)^2/x^2 = 8(x-2) \Rightarrow 2x^2 - 25x + 50 = 0 \Rightarrow x = 10$ ($x = 2,5$ olamaz). **$|AC| = 10$**

Soru 4 · İkizkenar-Eşkenar**A) 13**

Kırmızı BDC parçası C etrafında 60° döndürülerek B, A'ya taşınmış: A D' C, BDC'nin eşi $\Rightarrow |AD'| = 12$, $|CD'| = |CD| = 5$, $m(\angle AD'C) = 150^\circ$.

$|CD| = |CD'|$ ve $m(\angle DCD') = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCD'$ eşkenar $\Rightarrow m(\angle CD'D) = 60^\circ$.

$m(\angle AD'D) = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow |AD|^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow \mathbf{|AD| = 13}$

Soru 5 · Açıortay**D) 12**

Kosinüs teoremi: $14^2 = 16^2 + a^2 - 16a \Rightarrow a^2 - 16a + 60 = 0 \Rightarrow a = 6$ veya 10 . C açısı dar olmalı $\Rightarrow \mathbf{|BC| = 10}$.

Katlamada C, [AB] üzerine düştüğüne göre AD açıortay: $|BD| : |DC| = 16 : 14 \Rightarrow |BD| = 16/3$, $|DC| = 14/3$.

$|AC'| = 14 \Rightarrow |BC'| = 2$, $|C'D| = |CD| = 14/3$. $\angle(DBC') = 16/3 + 2 + 14/3 = \mathbf{12}$

Soru 6 • Açortay

C) $4\sqrt{10}$

A açısının açortayı $[AD]$ çizilsin: $m(\angle DAC) = \alpha = m(\angle C) \Rightarrow ADC$ ikizkenar, $|AD| = |DC|$.
 $m(\angle BAD) = \alpha = m(\angle C)$ ve B ortak $\Rightarrow ABD \sim CBA \Rightarrow |AB|^2 = |BD| \cdot |BC|$.
 İç açortay: $|BD| : |DC| = 8 : 12 \Rightarrow |BD| = 2x/5$. $64 = (2x/5) \cdot x \Rightarrow x^2 = 160 \Rightarrow x = 4\sqrt{10}$

Soru 7 • Kenarortay

A) 14

$C(0,0)$, $B(-24, 0)$, $A(0, 18) \Rightarrow G = (-8, 6) \Rightarrow |CG| = 10$.
 Döndürmede $[BC]$ kenarı G' 'den geçince B' , CG ışını üzerinde ve $|CB'| = 24$ olur.
 $|B'G| = 24 - 10 = 14$

Soru 8 • Kenarortay

C) 8

D'yi orijin, AC 'yi x eksenine al: $A(-2, 0)$, $C(10, 0)$, $B = x(\cos\theta, \sin\theta)$. $G = ((x \cos\theta + 8)/3, x \sin\theta/3)$.
 DG , BDC açısının açortayı $\Rightarrow G$ 'nin açısı $\theta/2$: $\frac{x \sin\theta}{x \cos\theta + 8} = \tan(\theta/2) = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
 $x + x \cos\theta = x \cos\theta + 8 \Rightarrow |BD| = 8$

Soru 9 • Merkezler

C) $2\sqrt{6}$

D diklik merkezi $\Rightarrow AD \perp BC$ ve $CD \perp AB$. $m(\angle DAC) = 90^\circ - m(\angle C) = 15^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 75^\circ$; $m(\angle DCA) = 90^\circ - m(\angle A) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle A) = 60^\circ$.
 $|BC| = 2R \cdot \sin A \Rightarrow 6\sqrt{2} = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{6}$.
 Köşenin diklik merkezine uzaklığı $|AD| = 2R \cdot \cos A = 4\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{6}$

Soru 10 • Merkezler

D) 30

EF , BC 'nin orta dikmesi $\Rightarrow |EB| = |EC|$, $m(\angle FEC) = 50^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 40^\circ$, $m(\angle BEC) = 100^\circ$.
 DE , ADC açısını iki eşit parçaya böler $\Rightarrow DE$, DBC üçgeninde D 'nin dış açortayıdır.
 Dış açortay ile BC 'nin orta dikmesi çevrel çember üzerinde kesişir $\Rightarrow D, B, C, E$ çembersel $\Rightarrow m(\angle BDC) = m(\angle BEC) = 100^\circ$.
 DBC üçgeninde: $50^\circ + 100^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$